Linearne nejednadžbe-2.dio

odgajateljica Valentina Zemlić

Prisjetimo se…

- Da bi umnožak dvaju brojeva bio pozitivan, ti brojevi moraju ili oba biti pozitivni ili oba negativni
- Da bi umnožak dvaju brojeva bio negativan, mora jedan od njih biti pozitivan, a drugi negativan
- Da bi količnik dvaju brojeva bio pozitivan, moraju oba biti pozitivna ili oba negativna
- Da bi količnik dvaju brojeva bio negativan, mora jedan biti pozitivan, a drugi negativan

1. Riješimo nejednadžbe:

$a)$ $(x-1)(x-2)>0$

$b)$ $(2x-1)(x+5)\leq 0$

Rješenje:

a) S obzirom na to da umnožak mora biti veći od nule, razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: $x-1>0$ i $x-2>0$
2. slučaj: $x-1<0$ i $x-2<0$

Krenimo od prvog slučaja.

Trebamo ustvari riješiti sustav:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

Time dobivamo $x > 1$ i $x > 2$, tj. uzimamo presjek tih rješenja pa imamo $\boldsymbol{x > 2.}$

Na isti način riješimo i drugi slučaj, odnosno sustav:

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

Iz čega dobivamo $x < 1$ i $x < 2$, te uzimanjem presjeka dolazimo do $\boldsymbol{x < 1}$.

Konačno, rješenje početne nejednadžbe je unija dobivenih rješenja, tj. $x > 2$ **ili** $x < 1$, šro možemo zapisati u obliku intervala $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$.

$b)\ (2x-1)(x+5) \leq 0$

Razlikujemo 2 slučaja:

1. slučaj: $2x-1 \geq 0$ i $x+5 \leq 0$
2. slučaj: $2x-1 \leq 0$ i $x+5 \geq 0,$

trebamo riješiti 2 sustava, pa krenimo s prvim:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+5 \leq 0 \end{cases}$$

Rješenje prve nejednadžbe je $x \geq \frac{1}{2}$, a rješenje druge nejednadžbe je $x \leq -5$. Uočimo sada da nemamo presjek tih dvaju rješenja, pa ovaj sustav nema rješenja.

Krenimo sad na drugi sustav (2.slučaj):

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

Čijim rješavanjem dolazimo do $x \leq \frac{1}{2}$ i $x \geq -5$, što znači da je rješenja sustava: $-5 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

To je upravo i rjepenje početne nejednadžbe jer smo zaključili kako prvi slučaj nema rješenja.

2. Riješimo nejednadžbe:

$a)\ \frac{x-3}{x+3} \geq 0$

$b)\ \frac{-3x+8}{2x-1} \leq 0$

Rješenje:

a) Slično kao i s umnoškom, da bi količnik bio veći ili jednak nuli, razlikujemo 2 slučaja:

1. slučaj: $x - 3 \geq 0$ i $x + 3 > 0$ (Primijetimo da smo za nazivnik stavili da je veći od nule jer znamo da nazivnik ne može biti jednak nuli pošto s nulom ne dijelimo)
2. slučaj: $x - 3 \leq 0$ i $x + 3 < 0$

Krenimo na prvi slučaj, odnosno sustav:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$$

Rješenje prve nejednadžbe je $x \geq 3$, a druge $x > (-3)$. Presjek tih rješenja je $x \geq 3$.

Drugi sustav glasi:

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases}$$

Rješenje prve nejednadžbe je $x \leq 3$, a druge $x < -3$ pa je presjek tih rješenja $x < -3$.

Rješenje početne nejednadžbe je $x < -3$ ili $x \geq 3$.

b) Da bismo riješili ovu nejednadžbu, moramo riješiti ova dva slučaja, odnosno sustava:

1. slučaj: $\begin{cases} -3x + 8 \leq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$

2. slučaj: $\begin{cases} -3x + 8 \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$

Rješenje prvog slučaja dobivamo kao presjek rješenja danih dviju nejednadžbi, a to su: $x \geq \frac{8}{3}$ i $x > \frac{1}{2}$. Presjek je: $x \geq \frac{8}{3}$.

Rješenje drugog slučaja dobivamo kao presjek rješenja nejednadžbi, a to su: $x \leq \frac{8}{3}$ i $x < \frac{1}{2}$. Presjek je: $x < \frac{1}{2}$.

Konačno rješenje početne nejednadžbe je $x < \frac{1}{2}$ ili $x \geq \frac{8}{3}$.

Tablica predznaka

- Linearne nejednadžbe možemo riješiti i pomoću tablice prednaka
- Na taj način možemo pregledno pratiti kako se mijenja predznak vrijednosti algebarskih izraza
- Pogodna za rješavanje složenijih linearnih nejednadžbi

- Na sljedećim primjerima pokazat ćemo kako riješiti linearne nejednadžbe pomoću tablice predznaka

1. Riješimo nejednadžbu $(4x+1)(1-3x) \geq 0$.

Rješenje:

Prisjetimo se činjenice da se predznak polinoma prvog stupnja, $ax+b$, mijenja jednom i to u vrijednosti varijable x koja je rješenje linearne jednadžbe $ax+b=0$. S tim u vezi, znamo da se predznak polinoma neće mijenjati na intervalima lijevo i desno od te vrijednosti varijable x.

Uočimo da mi imamo dva polinoma prvog stupnja, $4x+1$ i $1-3x$, pa ćemo odrediti rješenja pripadnih linearnih jednadžbi.

Krenimo najprije s rješavanjem jednadžbe $4x + 1 = 0$:

$$4x = -1 \quad /:4$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Dakle, vrijednost polinoma $4x + 1$ promijenit će predznak u $x = -\frac{1}{4}$,

Tj. jedan predznak će biti na intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{1}{4} \right]$, a drugi na intervalu $\left[-\frac{1}{4}, \infty \right\rangle$. Primijetimo da smo kod $-\frac{1}{4}$ koristili uglate zagrade jer u početnoj nejednadžbi tražimo da su vrijednosti veće ili jednake od nule.

Da bismo odredili koji predznak poprima polinom na svakom od ova dva intervala, uzet ćemo jednu vrijednost x iz jednog od intervala te uvrštavanjem u polinom $4x + 1$ dobiti predznak.

Uzmimo najprije interval $\left\langle -\infty, -\frac{1}{4} \right]$ i iz tog intervala uzmimo za x primjerice broj -1.

Tada dobivamo:

$$4 \cdot (-1) + 1 = -4 + 1 = -3$$

što znači da će vrijednosti polinoma na intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{1}{4} \right]$ biti negativne.

Sada možemo zaključiti da će na intervalu $\left[-\frac{1}{4}, \infty \right\rangle$ vrijednosti polinoma biti pozitivne.

Idemo sada na drugi polinom i njemu pripadnu jednadžbu:

$$1 - 3x = 0$$

$$-3x = -1 \quad /:(-3)$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Dakle, sad imamo intervale $\langle -\infty, \frac{1}{3} \Big]$ i $\Big[\frac{1}{3}, \infty \rangle$. Uzmimo za x vrijednost iz intervala $\Big[\frac{1}{3}, \infty \rangle$, npr. broj 1 pa dobivamo: $1 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$ iz čega zaključujemo da su vrijednosti polinoma na tom intervalu negativne. To znači da su vrijednosti polinoma na intervalu $\langle -\infty, \frac{1}{3} \Big]$ pozitivne.

Sada kad smo objasnili detaljno postupak određivanja predznaka i intervala, krećemo na crtanje tablice predznaka.

		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	
$4x-1$	-		+		+
$1-3x$	+		+		-
$(4x-1)(1-3x)$	-		+		-

Dakle, u gornji red smo upisali vrijednosti u kojima se predznak mijenja, s plavim kružićima smo označili u kojoj vrijednosti se predznak kojeg polinoma mijenja i konačno upisali – za negativan predznak, a + za pozitivan.

Konačno, rješenje početne nejednadžbe je u posljednjem redu gdje je znak +, tj. na intervalu $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$.

- Sada kad smo na ovom primjeru detaljno objasnili postupak određivanaj predznaka i popunjavanja tablice predznaka, za ostale zadatke možemo skratiti postupak te odrediti samo vrijednosti u kojima se mijenja predznak i predznake, bez detaljnog zapisivanja.

- Postupak je sličan i za umnožak više od dva polinoma te za količnik

2. Riješimo nejednadžbe tablicom predznaka:

a) $(4x-3)(3x+6)<0$

b) $\frac{2x+1}{3-5x} \geq 0$

Rješenje:

a) Odredimo rješenja jednadžbi $4x-3=0$ i $3x+6=0$ kako bismo dobili vrijednosti u kojima se mijenja predznak polinoma. Za prvu jednadžbu dobivamo $x=\frac{3}{4}$, a za drugu jednadžbu $x=-2$.

Nacrtajmo sad tablicu predznaka:

	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	
$4x-3$	-	-	+
$3x+6$	+	-	-
$(4x-3)(3x+6)$	-	+	-

Da bismo zapisali odgovarajuće predznake uzmimo $x=-1$ pa provjerimo što se događa s prvim polinomom: $4(-1)-3=-4-3=-7$. Dakle, na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{3}{4} \right\rangle$ vrijednosti su negativne.

Za drugi polinom uzmimo npr. $x=1$ pa imamo: $3+6=9$ iz čega zaključujemo da su vrijednosti na intevalu $\langle -2, \infty \rangle$ pozitivne.

Konačno, rješenje početnenejednadžbe je: $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}, \infty \right\rangle$.

b) Radimo na isti način kao kod umnoška, samo moramo imati na umu da nam nazivnik ne smije biti jednak nuli.

Ako pogledamo jednadžbu $2x + 1 = 0$, zaključujemo da se predznak vrijednosti polinoma mijenja u $x = -\frac{1}{2}$. Imamo intervale $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right]$ i $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right\rangle$.

Ako pogledamo jednadžbu $3 - 5x = 0$, vidimo da se predznak vrijednosti polinoma mijenja u $x = \frac{3}{5}$. Time imamo intervale $\left\langle -\infty, \frac{3}{5}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{3}{5}, \infty\right\rangle$. Uočimo da broj $\frac{3}{5}$ ne uključujemo jer se radi o polinomu koji se nalazi u nazivniku.

Tablica predznaka nam sada izgleda ovako:

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	
$2x+1$	-		+		+
$3-5x$	+		+		-
$(2x+1)(3-5x)$	-		+		-

Uzimanjem $x = -1$ za prvi polinom dobivamo $-2+1=-1$ što znači da su vrijednsoti negativne na intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right]$.

Za $x = 1$ dobivamo $3-5=-2$ što znači da su vrijednosti drugog polinoma negativne na intervalu $\left\langle \frac{3}{5}, \infty \right\rangle$.

Konačno, rješenje početne nejednadžbe je: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right\rangle$.

Zaključak…

- Pri rješavanju linearnih nejednadžbi metodom tablice predznaka imamo sljedeće korake:

1. Odredimo vrijednosti u kojima se mijenja predznak (rješenje pripadne linearne jednadžbe). Time dobivamo po dva intervala za svaki polinom.
2. Upišimo dobivene vrijednosti u tablicu predznaka.
3. Odredimo predznak svakog od polinoma tako da uzmemo bilo koju vrijednost iz jednog od dva intervala koja smo dobili prvim korakom.
4. Odredimo predznak umnoška ili količnika tih polinoma (ono što se nalazi u početnoj nejednadžbi).
5. Zapišemo konačno rješenje u obliku intervala.