Linearna funkcija

Zadaci preuzeti iz Dakić, Elezović: Matematika 1, 1. dio (udžbenik za 1.razred)

Općenito…

- Linearna funkcija je funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana pravilom pridruživanja
$$f(x) = ax + b, \qquad a \neq 0.$$

- Pravac $y = ax + b$ je graf linearne funkcije

Značenje koeficijenta $\boldsymbol{a}$

- Koeficijent a naziva se nagib ili koeficijent smjera
- Ako je a pozitivan, pravac je rastući te što je njegova vrijednost veća to linearna funkcija brže raste (pravac je strmiji)
- Ako je a negativan, pravac je padajući te što je njegova vrijednost manja to linearna funkcija brže pada

Značenje koeficijenta $\boldsymbol{b}$

- Za $x = 0$ vrijedi $f(x) = b$, odnosno b je vrijednost linearne funkcije u nuli

1. Nacrtaj graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ ako je $f(-1) = -2$, $f(3) = 6$. Koliki je nagib te funkcije? U kojoj točki graf funkcije siječe os y?

Rješenje:

- Budući da znamo $f(-1) = -2$, uvrstimo $x = -1, f(x) = -2$ u $f(x) = ax + b$ te dobivamo:

$$-2 = -a + b$$

- Isto ponovimo za $f(3) = 6$:

$$6 = 3a + b$$

- Time smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama:

$$-2 = -a + b$$
$$6 = 3a + b$$

koji možemo riješiti metodom supstitucije ili metodom suprotnih koeficijenata.

- Uzmimo metodu supstitucije te iz prve jednadžbe izrazimo $b = -2 + a$ što zatim uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$6 = 3a - 2 + a$$
$$6 = 4a - 2$$
$$6 + 2 = 4a$$
$$8 = 4a$$
$$4a = 8 \quad /:4$$
$$a = 2$$

- Preostaje odrediti vrijednost koeficijenta b:

$$b = -2 + a$$
$$b = -2 + 2$$
$$b = 0$$

- Time smo dobili $f(x) = 2x$
- Dakle, nagib je jednak 2, a točka u kojoj graf funckije siječe os y je $(0,0)$

2. Ako je f linearna funkcija te ako je $f(1) = 1, f(3) = 5$, koliko je $f(-1), f(7)$?

Rješenje:

- Da bismo odredili traženo, trebamo prvo odrediti pravilo pridruživanja linearne funkcije pomoću danih podataka $f(1) = 1, f(3) = 5$, što radimo kao i u prvom zadatku
- Imamo:

$$1 = a + b$$
$$5 = 3a + b$$

- Probajmo sada riješiti metodom suprotnih koeficijenata na način da prvu jednadžbu pomnožimo s -1

$$1 = a + b \qquad /\cdot(-1)$$
$$5 = 3a + b$$

$$-1 = -a - b$$
$$5 = 3a + b$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo:

$$4 = 2a \quad /:2$$
$$2 = a$$
$$a = 2$$

Konačno, da bismo dobili vrijednost koeficijenta b dovoljno je u jednu od jednadžbi uvrstiti $a = 2$, npr. u prvu

$$1 = 2 + b \Rightarrow b = 1 - 2 \Rightarrow b = -1$$

- Time smo dobili linearnu funkciju:

$$f(x) = 2x - 1$$

- Sada možemo odrediti $f(-1), f(7)$ na sljedeći način:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$$

$$f(7) = 2 \cdot 7 - 1 = 14 - 1 = 13$$

3. Kad x naraste od -1 na 1, vrijednost linearne funkcije padne od 1 na -3. Kolika je promjena vrijednosti ove funkcije kad x naraste od 2 do 5?

Rješenje:

- Dano nam je $f(-1) = 1, f(1) = -3$
- Prvo trebamo odrediti pravilo pridruživanja linearne funkcije, što već znate sami

$$1 = -a + b$$
$$-3 = a + b$$

- Dobivamo $a = -2, b = -1$, pa je $f(x) = -2x - 1$

- Da bismo odredili promjenu vrijednosti funkcije u odnosu na promjenu vrijednosti x, možemo odrediti $f(2)\ i\ f(5)$ te izračunati $f(5) - f(2)$

- No, postoji jednostavniji način:

- Odredimo Δx, što je u našem slučaju $5 - 2 = 3$
- Nagib iznosi -2
- Imamo: $\Delta f(x) = a \cdot \Delta x = -2 \cdot 3 = -6$ što je promjena vrijednosti funkcije koju smo tražili

Savjet za zadatak u kojem treba poredati vrijednosti funkcije od najmanje prema najvećoj

- Naravno da se taj tip zadatka može riješiti računanjem vrijednosti funkcija za dane x, ali to je nepotreban posao
- Naime, potrebno je odrediti je li funkcija rastuća ili padajuća (ako je $a > 0$ funkcija je rastuća, ako $a < 0$ funkcija je padajuća)
- Nakon toga, ako je funkcija rastuća samo treba poredati x od najmanjeg prema najvećem te istim redom i vrijednosti funkcije
- Ako je pak funkcija padajuća, onda će najmanja vrijednost funkcije biti u najvećem x, a najveća u najmanjem x (dakle, obrnuti redoslijed)

Nultočka linearne funkcije

- Nul-točka linearne funkcije je broj x za koji je $f(x) = 0$ što znači da ju određujemo iz linearne jednadžbe

$$ax + b = 0$$

- To znači da je nultočka $x = -\frac{b}{a}$

1. Zadan je linearna funkcija $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$.

a) Nacrtaj graf ove funkcije.

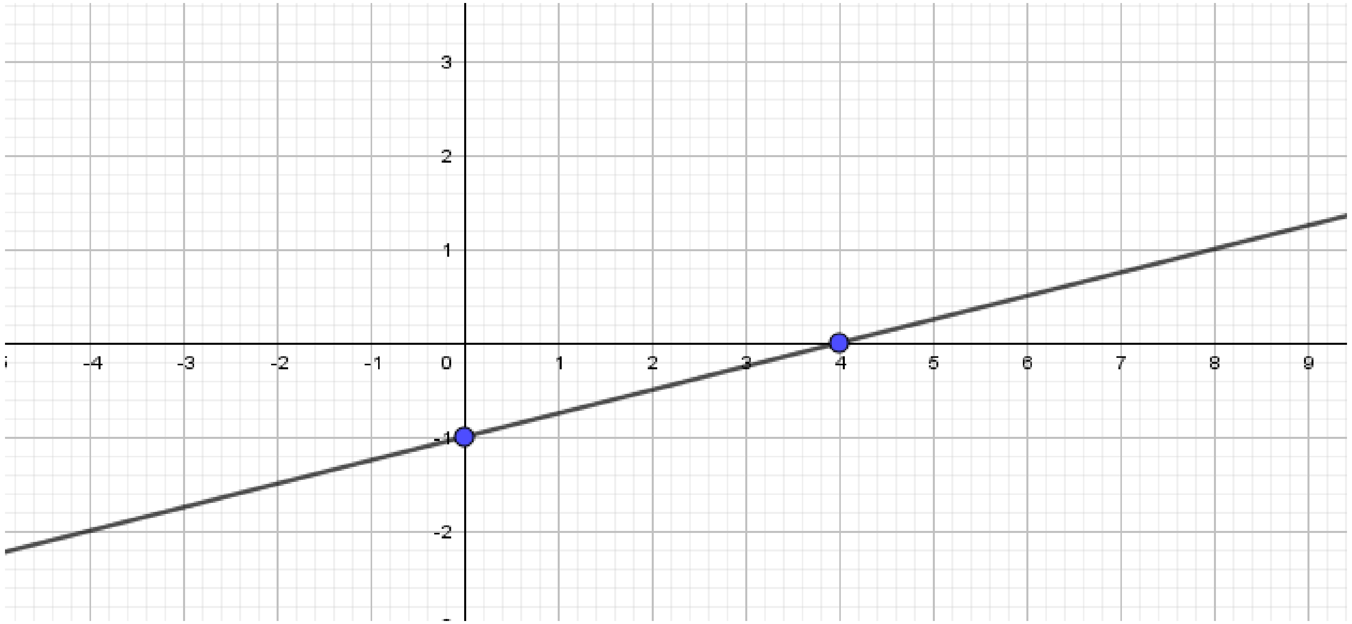
b) Odredi nultočku.

c) Kolika je promjena vrijednosti funkcije kada vrijednost varijable x naraste od -1 na 2?

Rješenje:

a) Da bismo nacrtali graf dane funkcije poslužit ćemo se točkom u kojoj ta funkcija siječe os y, a njene koordinate su $(0, b)$ i onom u kojoj siječe os x, $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

U našem slučaju to su točke $(0, -1)$ i $(4,0)$.



b) Nultočku funkcije ćemo izračunati kao rješenje ove jednadžbe:

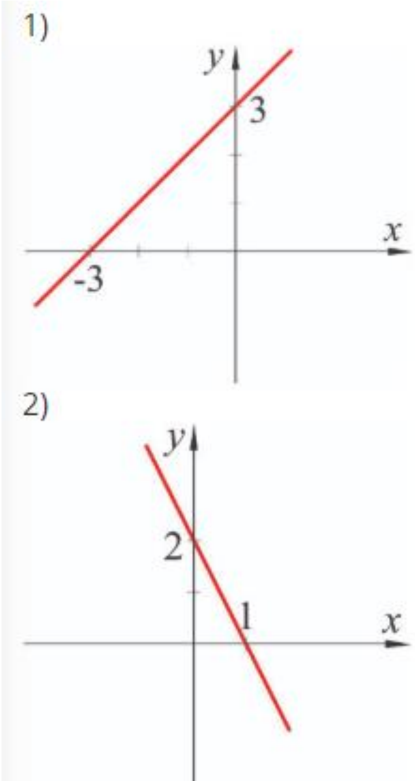
$$\frac{1}{4}x - 1 = 0$$
$$\frac{1}{4}x = 1 \quad /\cdot 4$$
$$x = 4$$

c) Uočimo da se vrijednost varijable povećala za 3 pa imamo:

$$\Delta f(x) = a \cdot \Delta x = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

Odredimo pravilo pridruživanja linearne funkcije iz njenog grafa

- Dane su slike grafova linearnih funkcija, na nama je da odredimo njihova pravila pridruživanja…



1) Pimijetimo dvije istaknute točke na grafu $(-3,0), (0,3)$. Iz toga možemo isčitati da je $f(-3) = 0, f(0) = 3$ što zatim možemo iskristiti u općem pravilu pridruživanja $f(x) = ax + b$ te dobivamo:

$$0 = -3a + b$$

$$3 = 0 \cdot a + b \Rightarrow b = 3$$

Uvrstimo $b = 3$ u prvu jednadžbu da bismo odredili koeficijent a:

$$-3a + b = 0 \Rightarrow -3a + 3 = 0$$

$$-3a = -3 \quad /:(-3)$$

$$a = 1$$

Dakle, dani graf pripada linearnoj funkciji $f(x) = x + 3$.

2) Na ovom grafu istaknute su točke $(1,0), (0,2)$ iz čega slijedi $f(1) = 0, f(0) = 2$, odnosno:

$$0 = a + b$$
$$2 = b$$

Tada je:

$$a + b = 0$$
$$a + 2 = 0$$
$$a = -2$$

Time smo dobili pravilo pridruživanja tražene linearne funkcije:

$$f(x) = -2x + 2$$

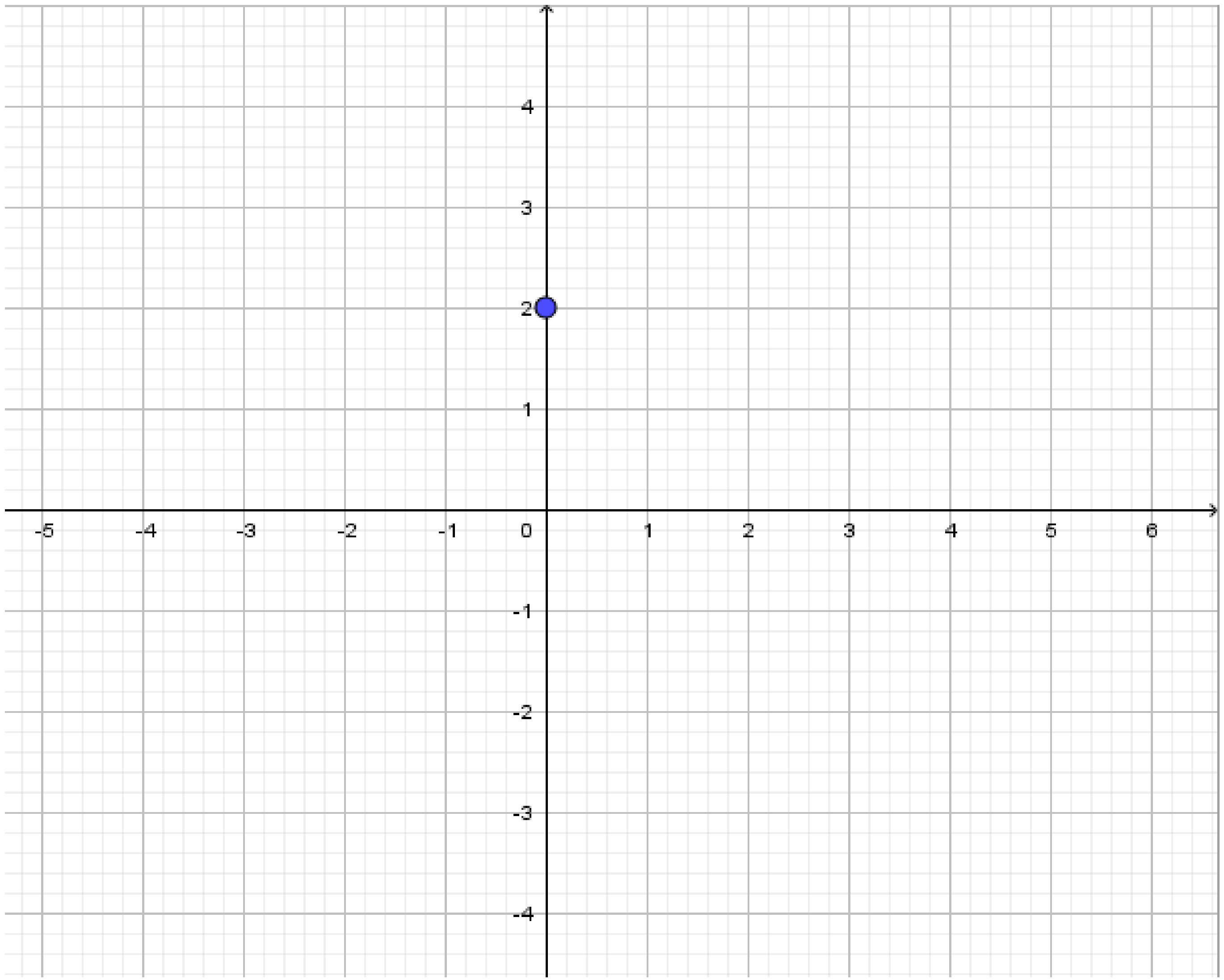
1. Prikaži grafički funkciju:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x \leq 0 \\ -\dfrac{1}{3}x + 2 & , x > 0 \end{cases}$$

Uočimo da je funkcija različito zadana za negativne i pozitivne brojeve, pa ćemo ju tako i nacrtati. Uočimo da promjena nastaje u $x = 0$ te da vrijednost funkcije za tu varijablu određujemo prvim pravilom pridruživanja, odnosno:

$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

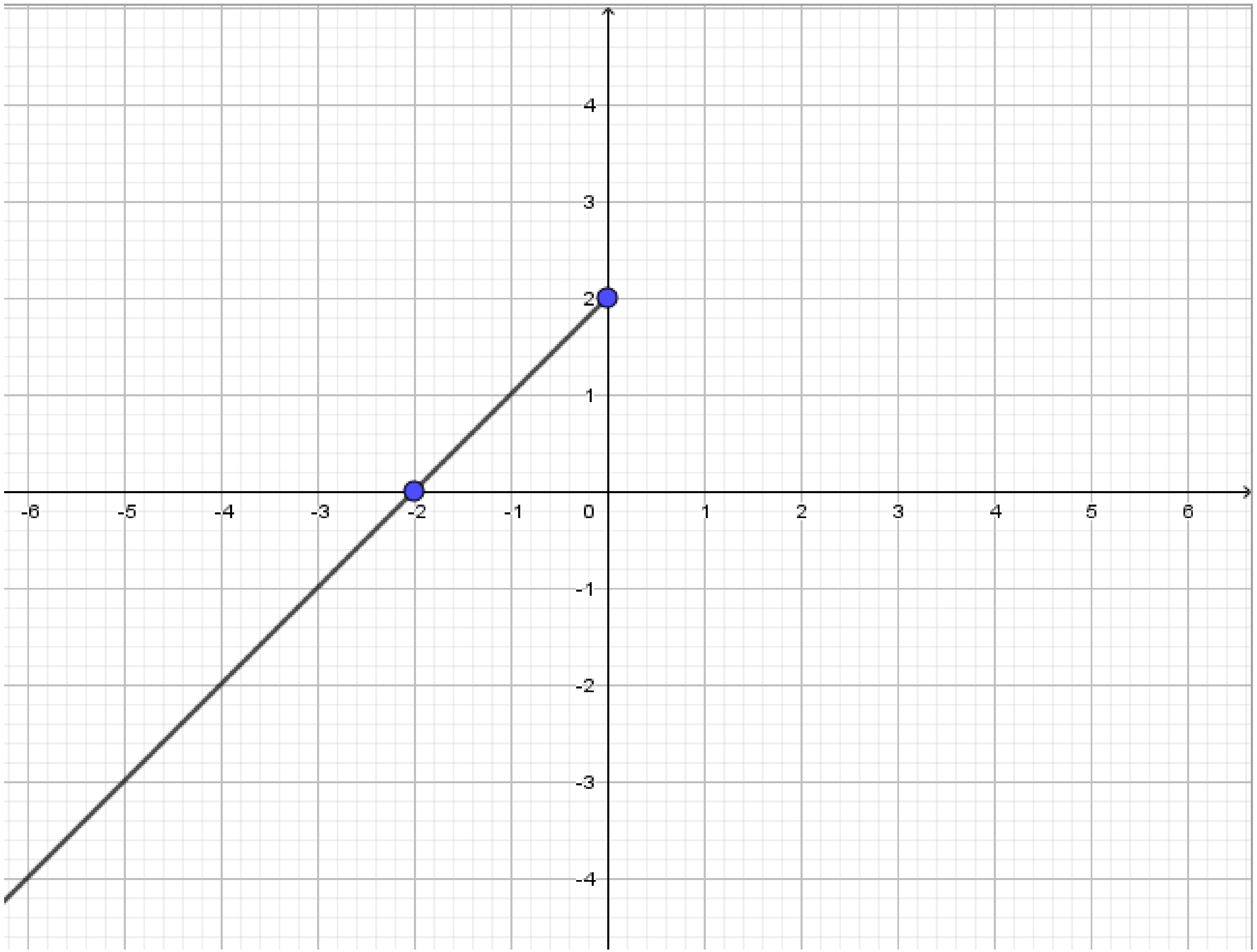
Stoga, istaknimo najprije točku $(0,2)$.


4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

- Točke grafa lijevo od istaknute, odnosno točke kojima je vrijednost x negativna zadovoljavaju pravilo pridruživanja $f(x) = x + 2$ te da bismo nacrtali taj dio grafa dovoljno je odrediti još jednu točku.
- To možemo tako da uzmemo bilo koju negativnu vrijednost za x i odredimo njemu pripadnu vrijednost funkcije
- Neka je $x = -2$, pa slijedi:

$$f(-2) = -2 + 2 = 0$$

- Time smo dobili drugu točku $(-2,0)$ te možemo spojiti s prvom polupravacem

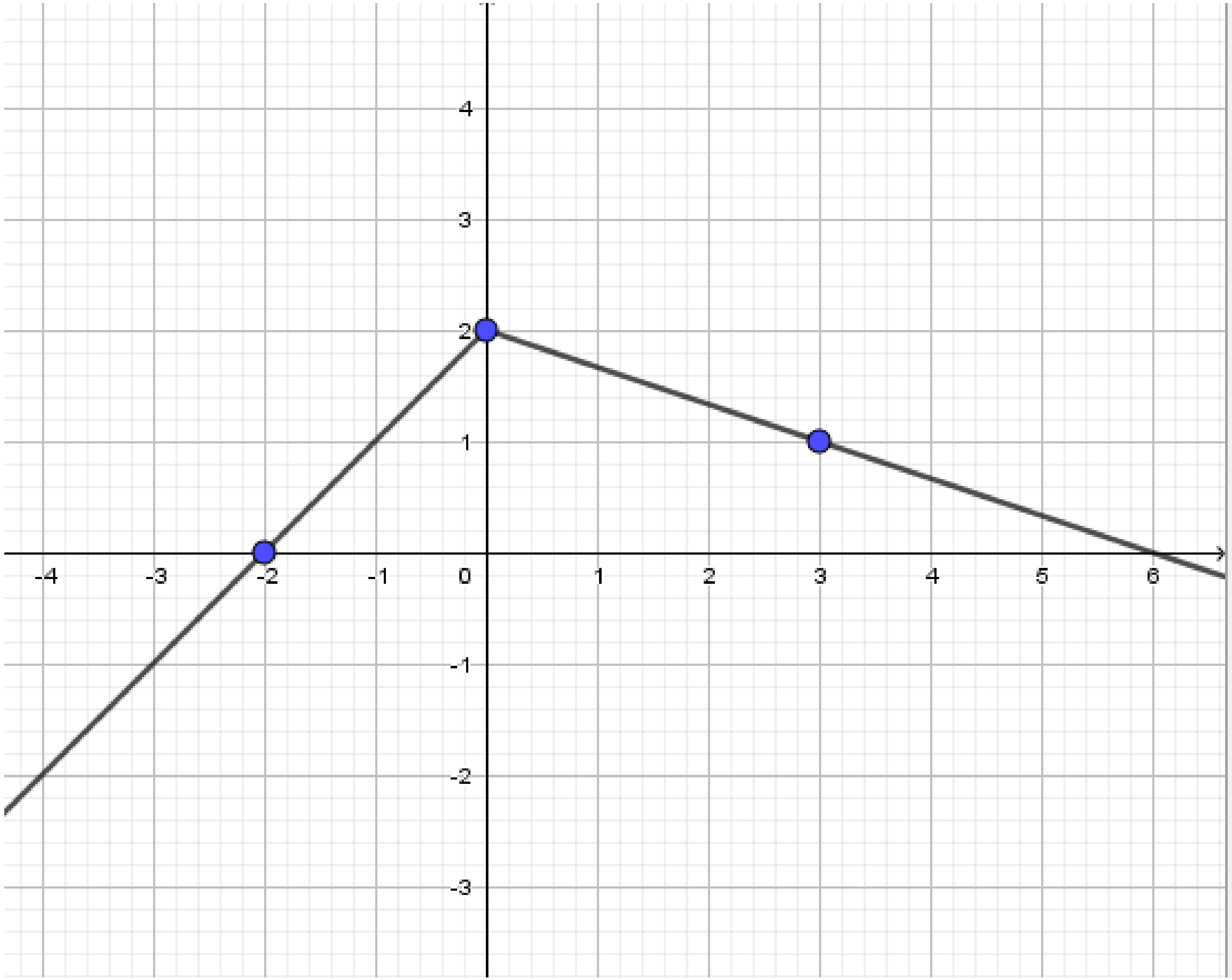


4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

- Dalje, trebamo nacrtati dio funkcije dan pravilom pridruživanja $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ za sve pozitivne vrijednosti varijable x.
- Postupak je isti kao i za prethodni dio
- Uzmimo npr. $x = 3$ pa imamo:

$$f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3 + 2 = -1 + 2 = 1$$

- Dobivena točka: $(3,1)$



4
3
2
1
-1
-2
-3
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

2. Prikaži grafički funkciju:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \leq 0 \\ 3 & , 0 < x \leq 2 \\ 3x - 3 & , x > 2 \end{cases}$$

Rješenje:

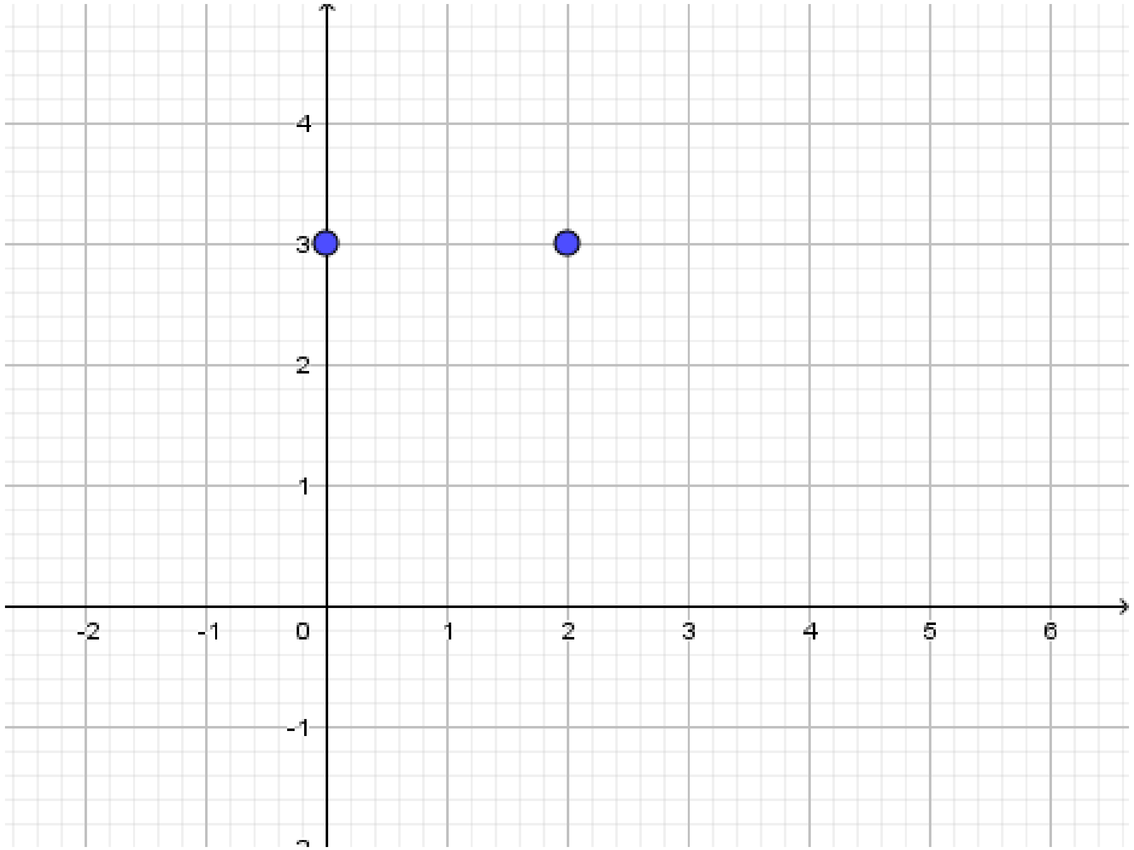
- Funkciju crtamo po dijelovima kao i u prethodnom zadatku, samo što sad imamo 3 dijela
- Uočimo da su prijelomne točke s varijablama $x = 0, x = 2$
- Odredimo $f(0)$ na sljedeći način:

$$f(0) = 0 + 3 = 3$$

- Sada odredimo $f(2)$:

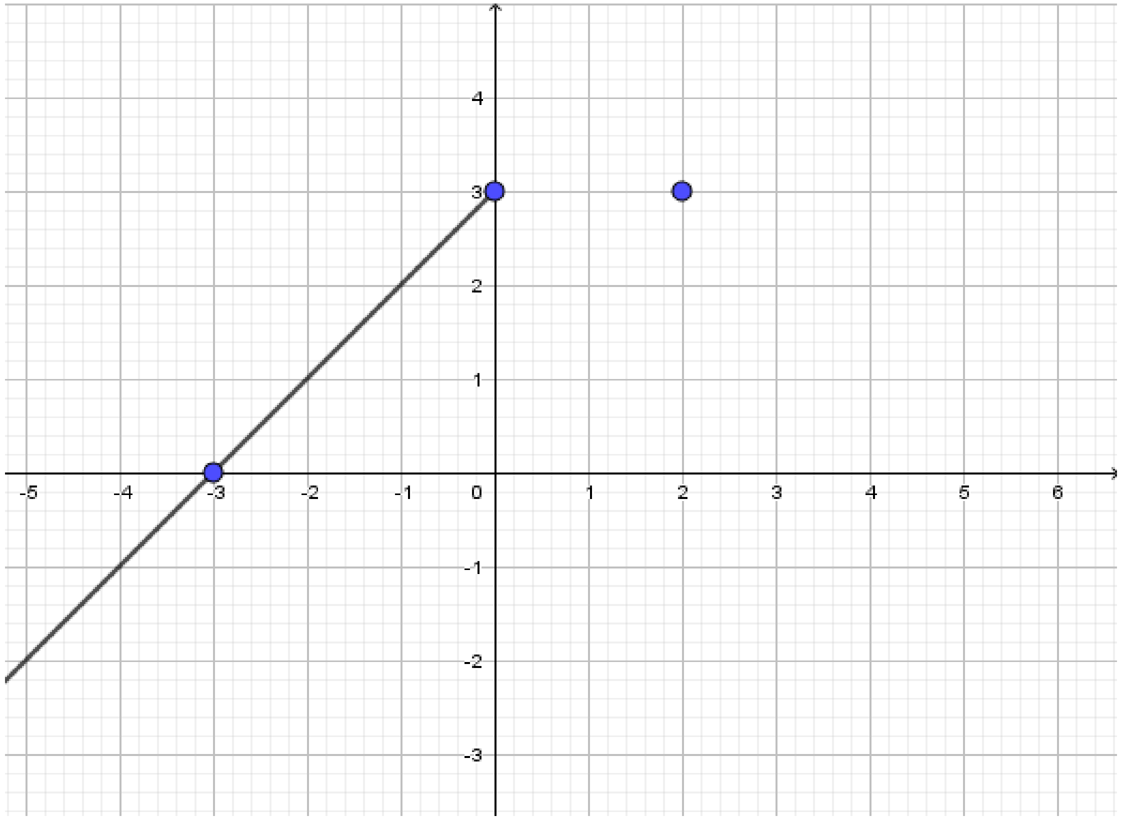
$$f(2) = 3$$

- Dakle, prvo ćemo istaknuti točke $(0,3), (2,3)$

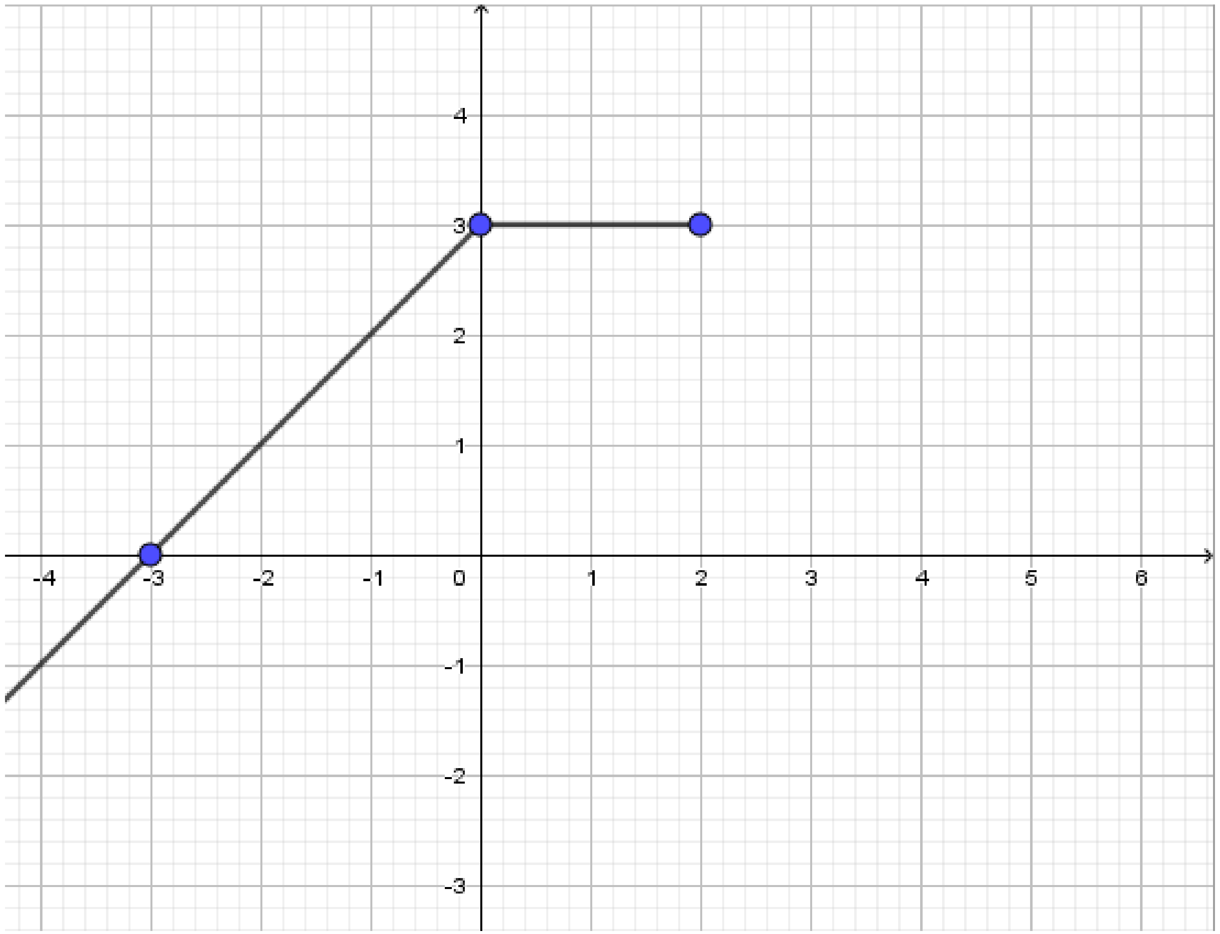


- Sad odredimo još jednu točku funkcije $f(x) = x + 3$
- Očito je da moramo uzeti negativnu vrijednost za x, npr. -3 pa imamo:

$$f(-3) - 3 + 3 = 0$$

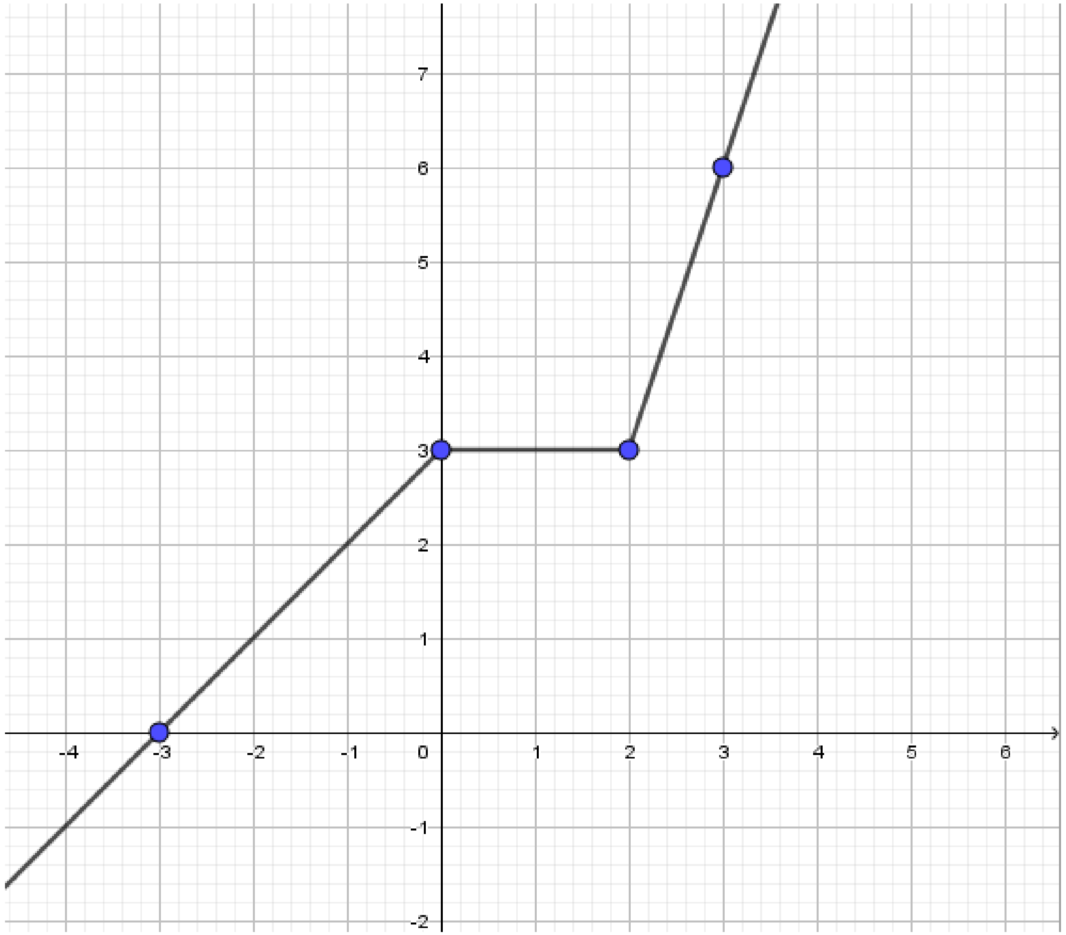


- Na intervalu $\langle 0, 2]$ funkcija poprima vrijednost 3



- Konačno, uzmimo npr. $x = 3$ pa imamo:

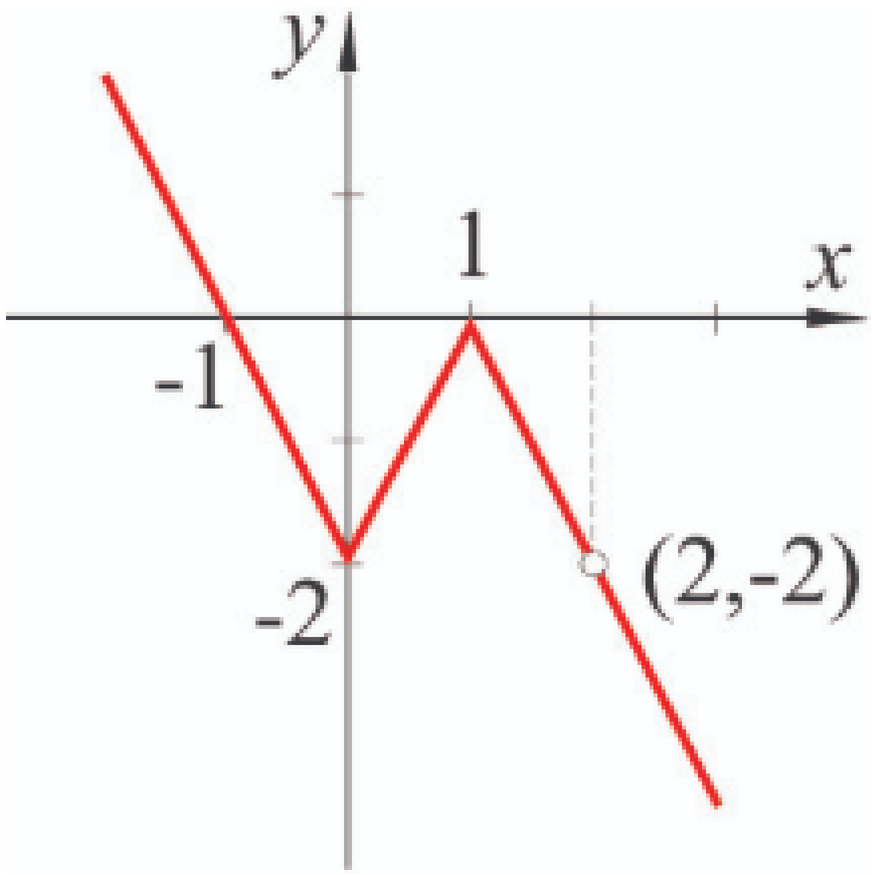
$$f(x) = 3 \cdot 3 - 3 = 9 - 3 = 6$$



Važno!!!!

- Za vrijednosti varijable x možete izabrati po volji brojeve, samo je bitno da se nalaze u zadanom intervalu

3. Opiši funkciju kojoj pripada graf:



- Uočimo da su prijelomne točke $(0,-2),(1{,}0)$ pa ćemo imati tri pravila pridruživanja
- Odredimo pravilo pridruživanaj za sve $x \leq 0$
- Primijetimo da je na tom dijelu grafa istaknuta još jedna točka $(-1{,}0)$ pa imamo

$$-2 = 0 \cdot a + b$$

i

$$0 = -a + b$$

tj.

$$b = -2$$

Što uvrstimo u $-a + b = 0$ pa dobivamo $-a = -b \Rightarrow a = -2$

- Dakle, $f(x) = -2x - 2,$ za $x \leq 0$
- Na drugom dijelu grafa istaknute su točke $(0,-2), (1,0)$ te imamo

$$-2 = b$$
$$0 = a + b$$

iz čega dobivamo $f(x) = 2x - 2$, za $0 < x \leq 1$

- Konačno, imamo točke $(1,0), (2,-2)$ s pomoću kojih na analogan način dolazimo do zaključka

$f(x) = -2x + 2$, za $x > 1$

- To znači da je tražena funkcija dana sa:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x \leq 0 \\ 2x - 2 , & 0 < x \leq 1 \\ -2x + 2 & , x > 1 \end{cases}$$

Sljedeća prezentacija donosi zadatke primjene linearne funkcije, sjecište pravaca i rješavanje sustava linearnih jednadžbi!